Aufgabe 20

Quelle: Peters, Arbeitsblatt 4, Aufgabe 4

Zum Paketschalter eines Postamts kommen pro Stunde durchschnittlich 6,5 Kunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde

a) genau 3 Kunden
b) höchstens 4 Kunden
c) mindestens 5 Kunden
kommen?

Lösung

Poisson–Verteilung mit Zufallsvariablen X: Anzahl Kunden und λ = 6,5

a) $f(3) = P(X = 3) = \frac{6{,}5^3}{3!} \cdot e^{-6{,}5} = \underline{\underline{0{,}0688}}$

oder

$f(3) = F(3) - F(2) = 0{,}118 - 0{,}043 = \underline{\underline{0{,}0688}}$

b)
$$P(X \le 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$
$$= \left(\frac{6{,}5^0}{0!} + \frac{6{,}5^1}{1!} + \frac{6{,}5^2}{2!} + \frac{6{,}5^3}{3!} + \frac{6{,}5^4}{4!}\right) \cdot e^{-6{,}5} = (6{,}5 + 21{,}125 + 45{,}771 + 74{,}3776) \cdot e^{-6{,}5}$$
$$= 148{,}7734 \cdot 0{,}001503 = \underline{\underline{0{,}22367}}$$

oder

$P(X \le 4) = F(4) = \underline{\underline{0{,}2237}}$

a) $P(x \ge 5) = 1 - P(X<5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - 0{,}2237 = \underline{\underline{0{,}7763}}$

Aufgabe 21

Quelle: Klausur WS11/12

An einer Autobahntankstelle tanken durchschnittlich 5 LKW pro Stunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde

a) genau 4 LKW,
b) höchstens 7 LKW,
c) mindestens 3 LKW

tanken?

Bitte begründen Sie die Wahl der von Ihnen zugrundegelegten Verteilung und rechnen mit vier Stellen nach dem Komma.

Lösung

Poisson–Verteilung mit $\lambda = 5$, w/ großer Anzahl n (= alle LKW) und geringer individueller Eintrittswahrscheinlichkeit (dieser LKW an dieser Tankstelle zu dieser Stunde)

a) P (X=4) = $f(4) = P(X = 4) = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = \underline{\underline{0{,}17546}}$ oder F(4)-F(3) = 0,4405 - 0,2650 = 0,1755

b) P (X ≤ 7) = F(7) = $\underline{\underline{0{,}8666}}$

c) P (X ≥ 3) = 1 - P (X ≤ 2) = 1 – F(2) = 1 – 0,1247 = $\underline{\underline{0{,}8753}}$

Aufgabe 22

Quelle: Klausur WS09/10

Bei der Produktion von Schrauben ergibt sich bei einer Maschine erfahrungsgemäß ein Ausschuß von 4 % der produzierten Menge. Die Produktion der einzelnen Schrauben (und damit die Frage „Ausschuß: Ja oder Nein“) sei unabhängig voneinander.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Entnahme von 200 an einem Tag produzierten Schrauben das Ergebnis

a) genau fünf Stücke Ausschuß,
b) höchstens zwölf Stücke Ausschuß,
c) mindestens sieben Stücke Ausschuß,

ist (bitte rechnen Sie mit 4 Nachkommastellen). Begründen Sie die Wahl der von Ihnen zugrundegelegten Verteilung.

Lösung

Poissonverteilung, da
$n=200>50$,
$p=0{,}04<0{,}1$,
$n \times p = \lambda = 8<10$.

a) $P\ (x=5) = F(5) - F(4) = 0{,}1912 - 0{,}0996 = 0{,}0916$
b) $P\ (x \leq 12) = F(12) = 0{,}9362$
c) $P\ (x \geq 7) = 1 - P(\leq 6) = 1 - 0{,}3134 = 0{,}6866$

Aufgabe 23

Quelle: Klausur WS12/13

Bei der Produktion von Glühbirnen ergibt sich bei einer Maschine erfahrungsgemäß ein durchschnittlicher Ausschuß von 3 % der produzierten Menge. Die Produktion der einzelnen Glühbirnen (und damit die Frage „Ausschuß: Ja oder Nein“) sei unabhängig voneinander.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Entnahme von 150 an einem Tag produzierten Glühbirnen das Ergebnis

a) genau vier Stücke Ausschuß,
b) höchstens acht Stücke Ausschuß,
c) mindestens sechs Stücke Ausschuß,

ist (bitte rechnen Sie mit 4 Nachkommastellen). Begründen Sie die Wahl der von Ihnen zugrundegelegten Verteilung.

Lösung

Poissonverteilung, da
$n=150>50$,
$p=0{,}03<0{,}1$,
$nxp= \lambda = 4{,}5<10$.

a) $P\ (x=4) = F(4) – F(3) = 0{,}5321 – 0{,}3423 = 0{,}1898$
b) $P\ (x\leq 8) = F(8) = 0{,}9597$
c) $P\ (x\geq 6) = 1- P(\leq 5) = 1 – 0{,}7029 = 0{,}2971$

Aufgabe 24

Quelle: Peters, Arbeitsblatt 4, Aufgabe 5

Im vergangenen Jahr erhielt eine Berliner Autovermietung für Ihre 100 Autos alle 14 Tage im Durchschnitt 7 Bußgeldbescheide wegen falschen Parkens. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter sonst gleichen Bedingungen an einem beliebigen Tag und unabhängig voneinander

a) kein Bußgeldbescheid

b) mindestens ein, aber höchstens zwei Bußgeldbescheide
bei der Autovermietung eintreffen?

Lösung

Poisson-Verteilung mit ZV X: Anzahl Bußgeldbescheide pro Tag mit λ =0,5

a) $f(0) = P(X=0) = \frac{0{,}5^0}{0!} \cdot e^{-0{,}5} = \underline{\underline{0{,}6065}}$

b) $P(1 \le X \le 2) = P(X=1) + P(X=2) = \left(\frac{0{,}5^1}{1!} + \frac{0{,}5^2}{2!}\right) \cdot e^{-0{,}5} = \underline{\underline{0{,}379}}$

oder

P (1 ≤ X ≤ 2) = P (X = 1) + P (X = 2) = f(1) + f(2) = (F(1)-F(0)) + (F(2)-F(1)) =
(0,9098 - 0,6065) + (0,9856 – 0,9098) = $\underline{\underline{0{,}3791}}$