4. KOMBINATORIK

4.1. Permutationen

Anzahl der Permutationen von N Elementen ohne Wiederholung:

$$N! = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Multinomialkoeffizient:

$$\frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \ldots \cdot N_k!}$$

4.2. Kombinationen

Ziehen von n Elementen aus N Elementen

Anzahl möglicher Variationen bzw. Kombinationen	**mit Wiederholung (mit „Zurücklegen")**	**ohne Wiederholung (ohne „Zurücklegen")**
mit Anordnung (Variation)	N^n	$\frac{N!}{(N-n)!}$
ohne Anordnung (Kombination)	$\binom{N-1+n}{n} = \frac{(N-1+n)!}{n! \cdot (N-1)!}$	$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$

5. WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFF UND RECHENREGELN

5.1. Notation

Ω Ergebnismenge eines Zufallsvorgangs
ω Elementarereignis
A, B Ereignisse
$P(A)$ Wahrscheinlichkeitsmaß

5.1. Wahrscheinlichkeiten

Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Axiom 1: $P(A) \geq 0$ für jedes Ereignis A

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$ für $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$

Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Mises:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(A) = P(A)$$

(Zufallsvorgang wird beliebig oft wiederholt: n $\to \infty$)

5.2. Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ mit: $P(B) > 0$

A und B sind unabhängig, falls gilt: $P(A|B) = P(A)$ bzw. $P(B|A) = P(B)$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A$ und B unabhängig

5.3. Totale Wahrscheinlichkeit und Bayes-Theorem

5.3.1. Notation

$A_1, A_2, \ldots A_n$ Ereignisse mit $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

B Ereignis mit bekannten bedingten W´keiten $P(B|A_i)$; $i = 1;\ldots;n$

5.3.2. Formeln

Totale Wahrscheinlichkeit: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Satz von Bayes: $P(A_j|B) = \dfrac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \dfrac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)}$

7. Zufallsvariable und Verteilungsfunktion

7.1. Notation

X Zufallsvariable (diskret oder stetig)

x Realisation von X

f(x) Wahrscheinlichkeitsfunktion (diskrete ZV) oder Dichte (stetige ZV)

$F(x) = P(X \le x)$ Verteilungsfunktion

7.2. Diskrete Zufallsvariable

7.2.1. Funktionen und Maßzahlen diskreter Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{falls } x = x_i \quad i = 1;2;3;\ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$

Erwartungswert: $E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$

Varianz: $Var(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 \cdot f(x_i)$

Standardabweichung: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

7.2.2. Wichtige diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung B(n;p): $f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad ; x = 0,1,2,...,n$

mit: $E(X) = n \cdot p$

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypergeometrische Verteilung H(N;M;n): $f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

mit: $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

$Var(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Poisson-Verteilung $P(\lambda)$: $f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad ; \lambda > 0$

Diskrete Gleichverteilung: $f(x_i) = p_i = \frac{1}{n} \quad ; i = 1,...,n$

7.3. Stetige Zufallsvariable

7.3.1. Funktionen und Maßzahlen stetiger Zufallsvariablen

Eigenschaften der Dichtefunktion:

(1) $f(x) \ge 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(3) $\int_a^b f(x)dx = P(a \le X \le b)$

Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Allgemeine Gesetze:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$
$$P(X \leq a) = F(a)$$
$$P(X \geq a) = 1 - F(a)$$

Erwartungswert: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)d(x)$

Varianz: $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \cdot f(x)d(x)$

Standardabweichung: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

7.3.2. Wichtige stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

A. Stetige Gleichverteilung

Dichte der stetigen Gleichverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ $\qquad Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

B. Normalverteilung

Dichte der N(μ;σ)-verteilten ZV:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Verteilungsfunktion der N(μ;σ)-verteilten ZV:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Erwartungswert und Varianz: $E(X) = \mu$ $\qquad Var(X) = \sigma^2$

Standardisierung der N(μ;σ)-verteilten Zufallsvariablen X:

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad Y \sim N(0;1)$$

mit: $F(x) = P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ [tabelliert]

7.4. Approximationen

Approximation der Binomialverteilung:

(1) Für n ≥ 50; p ≤ 0,1 und np ≤ 10; und p ist eine B(n; p)-verteilte ZV näherungsweise P(np)-verteilt.

(2) Für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ ist eine B(n; p)-verteilte ZV näherungsweise $N\left(np;\sqrt{np(1-p)}\right)-$verteilt.

Approximation der hypergeometrischen Verteilung:

Für $20n \le N$ ist eine H(N; M; n)-verteilte ZV näherungsweise $B\left(n;\frac{M}{N}\right)-$verteilt.

Approximation der Poisson-Verteilung:

Für $\lambda > 10$ ist eine $P(\lambda)$-verteilte ZV näherungsweise $N\left(\lambda;\sqrt{\lambda}\right)-$verteilt.

8. Punkt-Schätzung

Unbekannter Parameter der Grundgesamtheit:	**Schätzfunktion:**	
Mittelwert μ:	$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$	Mittelwert der Stichprobenwerte
Varianz σ^2:	$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	Varianz der Stichprobenwerte
Anteilswert p:	$\bar{p} = \frac{k}{n}$	Anteil in der Stichprobe

8. Intervall-Schätzung

9.1. Intervall-Schätzung: Konfidenzintervall für μ bei normalverteilter Grundgesamtheit und bekannter Varianz

Schritt 1: Ein Konfidenzniveau (1 - α) wird festgelegt (z.B. 0,95 oder 0,99).

Schritt 2: Der für das gewählte Konfidenzniveau zugehörige Wert c wird ermittelt, z.B.

(1 - α)	0,90	0,95	0,99	0,999
c	1,65	1,96	2,58	3,29

Schritt 3: Der Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ wird ermittelt.

Schritt 4: Man berechnet das Vertrauensintervall

$$\overline{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \leq \quad \mu \quad \leq \quad \overline{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Falls σ unbekannt und n > 30: Approximation von σ durch s mit $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$.

9.2. Konfidenzintervall für den Anteilswert p

Schritt 1: Ein Konfidenzniveau (1 - α) wird festgelegt (z.B. 0,95 oder 0,99).

Schritt 2: Der zu dem gewählten Konfidenzniveau zugehörige Wert c wird ermittelt.

(1 - α):	0,90	0,95	0,99	0,999
c	1,65	1,96	2,58	3,29

Schritt 3: Der Anteil $\overline{p} = \frac{k}{n}$ der Stichprobe wird berechnet.

Schritt 4: Falls $n \cdot \overline{p} \cdot \left(1 - \overline{p}\right) > 9$ gilt, so lautet das Konfidenzintervall:

$$\overline{p} - c \cdot \sqrt{\frac{\overline{p} \cdot (1 - \overline{p})}{n}} \quad \leq \quad p \quad \leq \quad \overline{p} + c \cdot \sqrt{\frac{\overline{p} \cdot (1 - \overline{p})}{n}}$$

[Falls $n \cdot \overline{p} \cdot \left(1 - \overline{p}\right) > 9$ aufgrund kleiner Stichproben nicht erfüllt ist, so ist die gezeigte Vorgehensweise nicht möglich, da man nicht mit der Normalverteilung arbeiten kann.]

10. ZWEISEITIGER TEST FÜR DEN MITTELWERT μ EINER NORMALVERTEILUNG

Schritt 1: Wahl einer Signifikanzzahl α und Entnahme des zugehörigen c-Wertes für (1 - α).

Schritt 2: Berechnung der Annahmegrenzen

$$c_u = \mu_0 - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ und } c_o = \mu_0 + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Schritt 3: Berechnung des Mittelwerts $\overline{x}$ der Stichprobe:

- Fällt $\overline{x}$ in den Annahmebereich, d.h. gilt $c_u \leq \overline{x} \leq c_o$, nehme man die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ an.
- Fällt $\overline{x}$ in den Ablehnungsbereich, lehne man die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ ab.
- Beim einseitigen Test lautet die Hypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ bzw. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ und die Alternativhypothese H_1: $\mu < \mu_0$ bzw. H_1: $\mu > \mu_0$. Folglich ist auch nur c_u oder c_o zu berechnen.

BINOMIALKOEFFIZIENT: $\binom{n}{k}$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	2	1										
3	3	3	1									
4	4	6	4	1								
5	5	10	10	5	1							
6	6	15	20	15	6	1						
7	7	21	35	35	21	7	1					
8	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
13	13	78	286	715	1.287	1.716	1.716	1.287	715	286	78	13
14	14	91	364	1.001	2.002	3.003	3.432	3.003	2.002	1.001	364	91
15	15	105	455	1.365	3.003	5.005	6.435	6.435	5.005	3.003	1.365	455
16	16	120	560	1.820	4.368	8.008	11.440	12.870	11.440	8.008	4.368	1.820
17	17	136	680	2.380	6.188	12.376	19.448	24.310	24.310	19.448	12.376	6.188
18	18	153	816	3.060	8.568	18.564	31.824	43.758	48.620	43.758	31.824	18.564
19	19	171	969	3.876	11.628	27.132	50.388	75.582	92.378	92.378	75.582	50.388
20	20	190	1.140	4.845	15.504	38.760	77.520	125.970	167.960	184.756	167.960	125.970

WAHRSCHEINLICHKEITSFUNKTION DER B(N;P)-VERTEILUNG: $f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \qquad ;x \geq 0$

n	x \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
1	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000	0,5500	0,6000	0,6500	0,7000	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500	0,2025	0,1600	0,1225	0,0900	0,0625	0,0400	0,0225	0,0100	0,0025
2	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000	0,4950	0,4800	0,4550	0,4200	0,3750	0,3200	0,2550	0,1800	0,0950
2	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500	0,3025	0,3600	0,4225	0,4900	0,5625	0,6400	0,7225	0,8100	0,9025
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250	0,0911	0,0640	0,0429	0,0270	0,0156	0,0080	0,0034	0,0010	0,0001
3	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750	0,3341	0,2880	0,2389	0,1890	0,1406	0,0960	0,0574	0,0270	0,0071
3	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750	0,4084	0,4320	0,4436	0,4410	0,4219	0,3840	0,3251	0,2430	0,1354
3	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250	0,1664	0,2160	0,2746	0,3430	0,4219	0,5120	0,6141	0,7290	0,8574
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625	0,0410	0,0256	0,0150	0,0081	0,0039	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
4	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500	0,2005	0,1536	0,1115	0,0756	0,0469	0,0256	0,0115	0,0036	0,0005
4	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750	0,3675	0,3456	0,3105	0,2646	0,2109	0,1536	0,0975	0,0486	0,0135
4	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500	0,2995	0,3456	0,3845	0,4116	0,4219	0,4096	0,3685	0,2916	0,1715
4	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625	0,0915	0,1296	0,1785	0,2401	0,3164	0,4096	0,5220	0,6561	0,8145
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313	0,0185	0,0102	0,0053	0,0024	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
5	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563	0,1128	0,0768	0,0488	0,0284	0,0146	0,0064	0,0022	0,0005	0,0000
5	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125	0,2757	0,2304	0,1811	0,1323	0,0879	0,0512	0,0244	0,0081	0,0011
5	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125	0,3369	0,3456	0,3364	0,3087	0,2637	0,2048	0,1382	0,0729	0,0214
5	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563	0,2059	0,2592	0,3124	0,3602	0,3955	0,4096	0,3915	0,3281	0,2036
5	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313	0,0503	0,0778	0,1160	0,1681	0,2373	0,3277	0,4437	0,5905	0,7738
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156	0,0083	0,0041	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938	0,0609	0,0369	0,0205	0,0102	0,0044	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000
6	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344	0,1861	0,1382	0,0951	0,0595	0,0330	0,0154	0,0055	0,0012	0,0001
6	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125	0,3032	0,2765	0,2355	0,1852	0,1318	0,0819	0,0415	0,0146	0,0021
6	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344	0,2780	0,3110	0,3280	0,3241	0,2966	0,2458	0,1762	0,0984	0,0305
6	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938	0,1359	0,1866	0,2437	0,3025	0,3560	0,3932	0,3993	0,3543	0,2321
6	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156	0,0277	0,0467	0,0754	0,1176	0,1780	0,2621	0,3771	0,5314	0,7351
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078	0,0037	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547	0,0320	0,0172	0,0084	0,0036	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
7	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641	0,1172	0,0774	0,0466	0,0250	0,0115	0,0043	0,0012	0,0002	0,0000
7	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734	0,2388	0,1935	0,1442	0,0972	0,0577	0,0287	0,0109	0,0026	0,0002
7	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734	0,2918	0,2903	0,2679	0,2269	0,1730	0,1147	0,0617	0,0230	0,0036
7	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641	0,2140	0,2613	0,2985	0,3177	0,3115	0,2753	0,2097	0,1240	0,0406
7	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547	0,0872	0,1306	0,1848	0,2471	0,3115	0,3670	0,3960	0,3720	0,2573
7	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078	0,0152	0,0280	0,0490	0,0824	0,1335	0,2097	0,3206	0,4783	0,6983
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039	0,0017	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313	0,0164	0,0079	0,0033	0,0012	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
8	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094	0,0703	0,0413	0,0217	0,0100	0,0038	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000
8	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188	0,1719	0,1239	0,0808	0,0467	0,0231	0,0092	0,0026	0,0004	0,0000
8	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734	0,2627	0,2322	0,1875	0,1361	0,0865	0,0459	0,0185	0,0046	0,0004
8	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188	0,2568	0,2787	0,2786	0,2541	0,2076	0,1468	0,0839	0,0331	0,0054
8	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094	0,1569	0,2090	0,2587	0,2965	0,3115	0,2936	0,2376	0,1488	0,0515
8	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313	0,0548	0,0896	0,1373	0,1977	0,2670	0,3355	0,3847	0,3826	0,2793
8	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039	0,0084	0,0168	0,0319	0,0576	0,1001	0,1678	0,2725	0,4305	0,6634
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020	0,0008	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176	0,0083	0,0035	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703	0,0407	0,0212	0,0098	0,0039	0,0012	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
9	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641	0,1160	0,0743	0,0424	0,0210	0,0087	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000
9	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461	0,2128	0,1672	0,1181	0,0735	0,0389	0,0165	0,0050	0,0008	0,0000
9	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461	0,2600	0,2508	0,2194	0,1715	0,1168	0,0661	0,0283	0,0074	0,0006
9	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641	0,2119	0,2508	0,2716	0,2668	0,2336	0,1762	0,1069	0,0446	0,0077
9	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703	0,1110	0,1612	0,2162	0,2668	0,3003	0,3020	0,2597	0,1722	0,0629
9	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176	0,0339	0,0605	0,1004	0,1556	0,2253	0,3020	0,3679	0,3874	0,2985
9	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020	0,0046	0,0101	0,0207	0,0404	0,0751	0,1342	0,2316	0,3874	0,6302
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098	0,0042	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439	0,0229	0,0106	0,0043	0,0014	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
10	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172	0,0746	0,0425	0,0212	0,0090	0,0031	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
10	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051	0,1596	0,1115	0,0689	0,0368	0,0162	0,0055	0,0012	0,0001	0,0000
10	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461	0,2340	0,2007	0,1536	0,1029	0,0584	0,0264	0,0085	0,0015	0,0001
10	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051	0,2384	0,2508	0,2377	0,2001	0,1460	0,0881	0,0401	0,0112	0,0010
10	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172	0,1665	0,2150	0,2522	0,2668	0,2503	0,2013	0,1298	0,0574	0,0105
10	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439	0,0763	0,1209	0,1757	0,2335	0,2816	0,3020	0,2759	0,1937	0,0746
10	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098	0,0207	0,0403	0,0725	0,1211	0,1877	0,2684	0,3474	0,3874	0,3151
10	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0025	0,0060	0,0135	0,0282	0,0563	0,1074	0,1969	0,3487	0,5987

STANDARDNORMALVERTEILUNG: $\Phi(Y)$, falls $Y > 0$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1*	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2*	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3*	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4*	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5*	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6*	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7*	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8*	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9*	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0*	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1*	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2*	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3*	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4*	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5*	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6*	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7*	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8*	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9*	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0*	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1*	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2*	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3*	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4*	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5*	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6*	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7*	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8*	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9*	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0*	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

STANDARDNORMALVERTEILUNG: $\Phi(Y)$, falls $Y < 0$

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
-3,0*	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0012	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
-2,9*	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019
-2,8*	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
-2,7*	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
-2,6*	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
-2,5*	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
-2,4*	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
-2,3*	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
-2,2*	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
-2,1*	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
-2,0*	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
-1,9*	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
-1,8*	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
-1,7*	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
-1,6*	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
-1,5*	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
-1,4*	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
-1,3*	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
-1,2*	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
-1,1*	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
-1,0*	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
-0,9*	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,8*	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,7*	0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,6*	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,5*	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,4*	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,3*	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,2*	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,1*	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
0,0*	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000